Aufgabe 1: Basissatz

Ein einfaches Beispiel sind orthonormierte Basisvektoren,

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

In dieser Basis gilt für die Koeffizienten $a_1, \ a_2, \ a_3$:

$$a_1 = 1 \ , a_2 = 2 \ , a_3 = 3$$

Aber es gibt beliebig viele andere Möglichkeiten, z. Bsp.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

In dieser Basis gilt für die Koeffizienten $a_1, \ a_2, \ a_3$:

$$a_1 = \frac{1}{3} \ , a_2 = 2 \ , a_3 = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2: Matrizendarstellung

a) Nur das i-te Element eines n-dimensionalen, orthonormalen Einheitsvektor $\vec{e}_i$ ist ungleich 0 ($(\vec{e}_i)_j = \delta_{ij}$). Somit gilt für das Produkt der Multiplikation $\vec{e}_i^{\,\dagger}\mathbf{O}\vec{e}_j$:

$$\vec{e}_i^{\,\dagger}\mathbf{O}\vec{e}_j = \sum_{kl} (\vec{e}_i^{\,\dagger})_k O_{kl} (\vec{e}_j)_l = \sum_{kl} \delta_{ik} O_{kl} \delta_{jl} = O_{ij}$$

Aus den Summen über k und l bleib jeweils ein einziges Element, das ungleich 0 ist.

b) Setze die Definition $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$ ein und multipliziere von links mit $\vec{e}_k^{\dagger}$:

$$\sum_i a_i \vec{e}_k^{\dagger} \mathbf{O} \vec{e}_i \quad = \quad \sum_j b_j \vec{e}_k^{\dagger} \vec{e}_j$$

Da $\vec{e}_k^{\dagger}\vec{e}_j = \delta_{kj}$, bleibt aus der Summe über j nur ein Element übrig:

$$\sum_i a_i \vec{e}_k^{\dagger} \mathbf{O} \vec{e}_i \quad = \quad b_k$$

Wie in Aufgabe a gezeigt gilt $\vec{e}_k^{\dagger}\mathbf{O}\vec{e}_i = O_{ki}$ und somit:

$$b_k = \sum_i O_{ki} a_i$$

Aufgabe 3: Kommutatoren

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\
[\mathbf{A}, \mathbf{B}] &= \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Adjungierte und hermitesche Matrizen

a) Mit Hilfe der Definition der Matrixmultiplikation soll gezeigt werden, dass für das Produkt $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ gilt $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$.

$$C^\dagger_{ij} = C^*_{ji} = (\sum_k A_{jk} B_{ki})^* = \sum_k A^*_{jk} B^*_{ki} = \sum_k A^\dagger_{kj} B^\dagger_{ik}$$

Da die Matrixelemente $A^\dagger_{kj}$ und $B^\dagger_{ik}$ Zahlen sind, gilt das Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned}
C^\dagger_{ij} &= \sum_k B^\dagger_{ik} A^\dagger_{kj} \\
\mathbf{C}^\dagger &= \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger
\end{aligned}$$

b) Mit $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\dagger$ gilt:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{BA}$$

Das Produkt ist also hermitesch ($\mathbf{C} = \mathbf{C}^\dagger$), wenn $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, was genau die Definition dafür ist, dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ kommutieren.

Aufgabe 5: Spur

Auch in dieser Aufgabe wird wieder das Kommutativgesetz verwendet:

a)

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = \sum_i (\mathbf{AB})_{ii} = \sum_{ij} A_{ij} B_{ji} = \sum_{ij} B_{ji} A_{ij} = \sum_j (\mathbf{BA})_{jj} = \mathrm{Tr}(\mathbf{BA})$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mathbf{ABC}) = \sum_i (\mathbf{ABC})_{ii} &= \sum_{ijk} A_{ij} B_{jk} C_{ki} \\
&= \sum_{ijk} C_{ki} A_{ij} B_{jk} = \mathrm{Tr}(\mathbf{CAB}) \\
&= \sum_{ijk} B_{jk} C_{ki} A_{ij} = \mathrm{Tr}(\mathbf{BCA})
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Unitäre Transformation

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &\xrightarrow{U} \mathbf{B} \\
\mathbf{B} &= \mathbf{U}^\dagger \mathbf{A}\,\mathbf{U} \\
\mathbf{U}^\dagger\,\mathbf{U} &= \mathbf{U}\,\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

a) von links $\mathbf{U}$, von rechts $\mathbf{U}^\dagger$, um ausnutzen zu können, dass $\mathbf{U}^\dagger\,\mathbf{U} = \mathbf{U}\,\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{UBU}^\dagger &= \mathbf{U}\,\mathbf{U}^\dagger \mathbf{AU}\,\mathbf{U}^\dagger \\
\mathbf{UBU}^\dagger &= \mathbf{A}
\end{aligned}$$

b) mit $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A} \cdot \det\mathbf{B}$ und $\mathbf{U}^\dagger\,\mathbf{U} = \mathbf{U}\,\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}) &= \det(\mathbf{U}^\dagger \mathbf{UB}) \\
&= \det(\mathbf{U}^\dagger) \cdot \det(\mathbf{UB}) = \det(\mathbf{UB}) \cdot \det(\mathbf{U}^\dagger) \\
&= \det(\mathbf{UBU}^\dagger) = \det(\mathbf{A})
\end{aligned}$$

c) vgl. Aufgabe 5

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{UBU}^\dagger) = \mathrm{Tr}(\mathbf{U}^\dagger \mathbf{UB}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{B})$$