Prof. Martin Schütz
Uni Regensburg

Aufgabe 1: Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Eigenvektoren $\vec{x}$ erfüllen die Gleichung $(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\vec{x} = 0$, es existiert eine nicht-triviale Lösung, wenn $\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) &= \begin{vmatrix} 3 - 1\cdot\lambda & 1 - 0\cdot\lambda \\ 1 - 0\cdot\lambda & 3 - 1\cdot\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)^2 - 1^2 = 8 - 6\lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

Die Determinante ist 0 für zwei Werte von λ (Lösungsformel für quadr. Gleichungen verwenden):

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \\ \lambda' &= 4 \end{aligned}$$

Die Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten findet man durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung. Für $\lambda = 2$ erhält man daraus die zwei Bedingungen (1) und (2):

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ (1)\ x_1 + x_2 &= 0 \quad \Rightarrow x_1 = -x_2 \\ (2)\ x_1 + x_2 &= 0 \quad \Rightarrow x_1 = -x_2 \\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der normierter Eigenvektor ($\vec{x}\cdot\vec{x} = 1$) ist genau bestimmt:

$$\vec{x}\cdot\vec{x} = x_1^2 + x_2^2 = 2x_1^2$$

$$\vec{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung für $\lambda' = 4$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\vec{x}' &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 0 \\ (1)\ -x_1' + x_2' &= 0 \quad \Rightarrow x_1' = x_2' \\ (2)\ x_1' - x_2' &= 0 \quad \Rightarrow x_1' = x_2' \\ \vec{x}' &= \begin{pmatrix} x_1' \\ x_1' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normierter Eigenvektor:

$$\vec{x}' \cdot \vec{x}' = (x')_1^2 + (x')_2^2 = 2(x')_1^2$$
$$\vec{x}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Durch Mulitplizieren der Matrizen in der richtigen Reihenfolge erhält man:

$$\begin{pmatrix} Gl.(1) & Gl.(2) \\ Gl.(2) & Gl.(3) \end{pmatrix}$$

mit:

$$O_{11}cos^2\theta + 2O_{12}cos\theta\ sin\theta + O_{22}sin^2\theta \tag{1}$$

$$O_{11}cos\theta\ sin\theta + O_{12}sin^2\theta - O_{12}cos^2\theta - O_{22}cos\theta\ sin\theta \tag{2}$$

$$O_{11}sin^2\theta - 2O_{12}sin\theta\ cos\theta + O_{22}cos^2\theta \tag{3}$$

c) Damit Matrix **O** durch **U** diagonalisiert werden kann, muss das Ergebnis aus Teilaufgabe b) eine Diagonalmatrix sein, was bedeutet:

$$\begin{aligned} O_{11}cos\theta\ sin\theta + O_{12}sin^2\theta - O_{12}cos^2\theta - O_{22}cos\theta\ sin\theta &\stackrel{!}{=} 0 \\ = O_{11}cos\theta\ sin\theta - O_{22}cos\theta\ sin\theta - O_{12}(-sin^2\theta + cos^2\theta) &\stackrel{=cos(2\theta)}{=} \\ = -O_{12}cos(2\theta) + (O_{11} - O_{22})cos\theta\ sin\theta \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} &\stackrel{=sin(2\theta)}{=} \\ = -O_{12}cos(2\theta) + \frac{1}{2}(O_{11} - O_{22})sin(2\theta) \end{aligned}$$

d) θ_0 muss folgende Gleichung erfüllen:

$$O_{12}cos(2\theta) = \frac{1}{2}(O_{11} - O_{22})sin(2\theta)$$

Hierbei müssen 4 Fälle unterschieden werden.

- $O_{11} - O_{22} = 0$ & $O_{12} = 0 \Rightarrow \theta$ beliebig
- $O_{11} - O_{22} \neq 0$ & $O_{12} = 0$
  $\Rightarrow \frac{1}{2}(O_{11} - O_{22})sin(2\theta) = 0 \Rightarrow sin(2\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{N}$
- $O_{11} - O_{22} = 0$ & $O_{12} \neq 0$
  $O_{12}cos(2\theta) = 0 \Rightarrow cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{2};\ k \in \mathbb{N}$
- $O_{11} - O_{22} \neq 0$ & $O_{12} \neq 0$
  $\frac{sin(2\theta)}{cos(2\theta)} = \frac{2O_{12}}{O_{11}-O_{22}} = tan(2\theta) \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}arctan\frac{2O_{12}}{O_{11}-O_{22}}$

e) Hier gilt Fall 3 aus Teilaufgabe d) und somit ist z.Bsp. $\theta = \frac{\pi}{4}$. Analog zu Teilaufgabe b) wird nun $\mathbf{F}$ mit $\mathbf{U}$ diagonalisiert, wobei θ in $\mathbf{U}$ gleich $\frac{\pi}{4}$ ist. $\mathbf{U}$ sieht damit wie folt aus:
$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
Ergebnis für $\mathbf{f}$:
$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

f) Zu zeigen: $U^\dagger f f U = F^2$
$U^\dagger f f U = U^\dagger f \cdot 1 \cdot f U = U^\dagger f U U^\dagger f U =$
mit $F = U^\dagger f U = U f U^\dagger$
$= F \cdot F = F^2$

Aufgabe 2: Inhomogenes lineares Gleichungsystem

$$\mathbf{Q}^\omega\, \vec{x} = (\mathbf{A} - \omega \mathbf{1})\vec{x} = \vec{c}$$

Zunächst muss $\mathbf{Q}^\omega$ diagonalisiert werden, zu $\mathbf{q}^\omega$.

$$\mathbf{q}^\omega = \mathbf{U}^\dagger(\mathbf{A} - \omega\mathbf{1})\mathbf{U} = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{U} - \mathbf{U}^\dagger\omega\mathbf{1}\mathbf{U} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{a} - \omega\mathbf{1}$$

$$(\mathbf{q}^\omega)_{kl} = (a_{kl} - \omega)\delta_{kl}$$

Dies ist eine Diagonalmatrix. Ihr Inverses $\mathbf{g}^\omega = [\mathbf{q}^\omega]^{-1}$ ist wiederum eine Diagonalmatrix, mit Diagonalelementen die den reziproken Diagonalelementen von $\mathbf{q}^\omega$ entsprechen:

$$(\mathbf{g}^\omega)_{kl} = \frac{\delta_{kl}}{(a_{kl} - \omega)}$$

Die Rücktransformation von $\mathbf{g}^\omega$ mit $\mathbf{U}$ liefert die Inverse zu $\mathbf{Q}^\omega$, genannt $\mathbf{G}^\omega$.

$$\mathbf{G}^\omega = \mathbf{U}\mathbf{g}^\omega\mathbf{U}^\dagger$$

$$(\mathbf{G}^\omega)_{ij} = \sum_{kl} \frac{U_{ik}\delta_{kl}U^\dagger_{lj}}{a_{kl} - \omega} = \sum_k \frac{U_{ik}U^\dagger_{kj}}{a_{kk} - \omega} = \sum_k \frac{U_{ik}U^*_{jk}}{a_{kk} - \omega}$$

Aufgabe 3: Taylorreihe

1.

$$f(x) \approx cos(0) + (x-0)(-sin(0)) + \frac{x^2}{2}(-cos(0)) + \frac{x^3}{6}sin(0) + \frac{x^4}{24}cos(0)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

2.

$$f(x) \approx exp(-0) + (x-0)(-exp((-0) + \frac{x^2}{2}exp(-0) + \frac{x^3}{6}(-exp(-0)) +$$
$$\frac{x^4}{24}(exp(-0)$$
$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

Aufgabe 4: Lagrange Multiplikatoren (Optimierung mit Nebenbedingungen)

Die Nebenbedingung kann zu folgendem umgeformt werden:

$$x + y - 3 = 0$$

Die aufgesetzte Lagrangefunktion sieht dann folgendermaßen aus:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(x + y - 3) = x^2 + 2y^2 + \lambda\ x + \lambda\ y - \lambda 3$$

Die Ableitungen nach den drei Variablen werden null gesetzt,

$$\frac{dL}{dx} \stackrel{!}{=} 0 = 2x + \lambda$$

$$\frac{dL}{dy} \stackrel{!}{=} 0 = 4y + \lambda$$

$$\frac{dL}{d\lambda} \stackrel{!}{=} 0 = x + y - 3$$

und liefern ein Gleichungsystem.

$$\begin{aligned} 2x + 0y + \lambda &= 0 \\ 0x + 4y + \lambda &= 0 \\ x + y + 0 &= 3 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungsystem kann auch in Matrixschreibweise dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lst man das Gleichungssystem erhält man:

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= 2 \\ \lambda &= -4 \end{aligned}$$